**АЛГЕБРА**
**Категорія математичний аналіз**

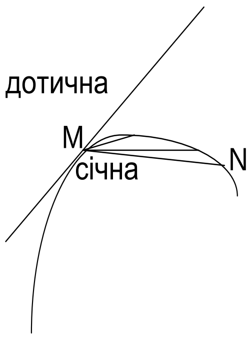
## Похідна функції та її застосування

*Похідною функції* $y = f(x)$ *в точці* $x$ *називається границя відношення приросту функції в точці* $x$ *до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x}$$

Дотична до графіка функції і її геометричний зміст похідної

*Дотичною до кривої в даній точці* $M$ *називається граничне положення січної* $MN$, *коли точка* $N$ *наближається вздовж кривої до точки* $M$.

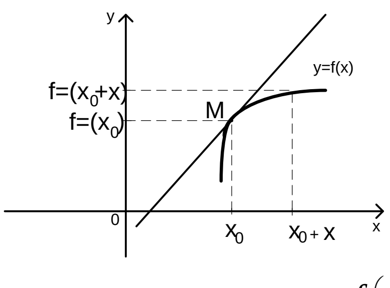



$f'(x_0) = tg\varphi$

$k-$ кутовий коефіцієнт дотичної

$k = tg\varphi = f'(x_0)$

**Рівняння дотичної** до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою $x_0$




$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Значення похідної в точці $x_0$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою $x_0$ і дорівнює тангенсу кута нахилу цієї дотичної до осі $Ox$ (*кут відлічується від додатного напрямку осі* $Ox$ *проти годинникової стрілки)*

## Фізичний зміст похідної

Похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргументу. Похідна за часом є міра швидкості зміни, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин.

Якщо $S = S(t)$ - залежність пройденого шляху від часу, то

$v = S'(t)$ - швидкість прямолінійного руху,

$a = v'(t) = S''(t)$ Прискорення прямолінійного руху.

| Таблиця похідних | |
|---|---|
| $c' = 0$ | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ |
| $(x^n)' = nx^{n-1}$ | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $(x)' = 1$ | $(\sin x)' = \cos x$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(\cos x)' = -\sin x$ |
| $(a^x)' = a^x \ln a$ | $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |

| Формули і правила диференціювання | |
|---|---|
| $c' = 0$ | $(u \pm v)' = u' \pm v'$ |
| $(cv)' = cv'$ | $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ |
| $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2} \cdot v'$ | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$ |

**Похідна складеної функції** : Якщо, $y = f(u)$**,** а $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$, то

$$y' = (f(u))' \cdot (u(x))'$$

**Обчислення похідних функції**

**Задача 1.** Обчислити значення похідної функції $f(x) = -x + 3x^2 - 5$ в точці $x_0 = 3$.

Розв'язок

Знаходимо похідну функції $f(x) = -x + 3x^2 - 5$

$$f'(x) = (-x + 3x^2 - 5)' = (-x)' + (3x^2)' - (5)' = -1 + 6x - 0 = -1 + 6x$$

Обчислимо значення похідної функції в точці $x_0 = 3$:

$$f'(3) = -1 + 6 \cdot 3 = -1 + 18 = 17.$$

Відповідь: 17.

**Задача 2.** Знайти похідну функції $y = x^4 \cdot 3^x$.

Розв'язок

Похідна добутку дорівнює:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Таким чином,

$$y' = (x^4 \cdot 3^x)' = (x^4)' \cdot 3^x + x^4 \cdot (3^x)' =$$

$$= 4x^3 \cdot 3^x + x^4 \cdot 3^x \cdot \ln 3$$

**Задача 3.** Знайти похідну функції $y=\dfrac{x^3+2x}{\cos x}$.

Розв'язок

Похідна частки дорівнює:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Таким чином,

$$y'=\left(\frac{x^3+2x}{\cos x}\right)'=\frac{\left(x^3+2x\right)'\cdot\cos x-\left(x^3+2x\right)\left(\cos x\right)'}{\left(\cos x\right)^2}=\frac{\left(3x^2+2\right)\cos x-\left(x^3+2x\right)\left(-\sin x\right)}{\left(\cos x\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(3x^2+2\right)\cos x+\sin x\left(x^3+2x\right)}{\left(\cos x\right)^2}$$

## Геометричний зміст похідної

**Задача 4.**

Чи є пряма дотичної до графіка функції? Якщо так, то знайдіть абсцису точки дотику.

Розв’язок

1) Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$k=\left(x^3-5x^2-6x+50\right)'=3x^2-10x-6$$

.

2) Якщо пряма є дотичною, то, $k=3x^2-10x-6=2$, $3x^2-10x-8=0$,

$D_1=25+24=49, x_1=\dfrac{5-7}{3}=-\dfrac{2}{3}; x_2=\dfrac{5+7}{3}=4$.

3) Якщо пряма $y=2x+2$ є дотичною до графіка функції $y=x^3-5x^2-6x+50$, то значення даних функцій в точці дотику рівні. Перевіримо здійсненність умови:

а) $y\left(-\dfrac{2}{3}\right)=2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+2=-\dfrac{4}{3}+2=-1\dfrac{1}{3}+2=\dfrac{2}{3}$;

$$y\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3-5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+50=-\frac{8}{27}-\frac{20}{9}+4+50=54-\frac{68}{27}=54-2\frac{14}{27}=51\frac{13}{27}.$$

Пряма не дотикається до графіка функції в точці з абсцисою р.івною $-\dfrac{2}{3}$.

б). $y(4)=64-5\cdot16-6\cdot4+50=114-80-24=10$

Пряма $y=2x+2$ дотикається до графіка функції в точці з абсцисою, що дорівнює 4.

Відповідь: 4.

**Задача 5.**

Складти рівняння дотичної до графіка функції

а) $y=x^2+3x$ в точці $x=-1$:

1) $f(-1)=(-1)^2+3\cdot(-1)=1-3=-2;$

2) $f'(x)=\left(x^2+3x\right)'=2x+3;$

3) $f'(-1)=2\cdot(-1)+3=-2+3=1;$

4) $y=f(-1)+f'(-1)(x-(-1));$

$y=-2+1(x+1); y=x-1.$

Відповідь: $y=x-1$.

б) $y=x^3-4x^2-x+5$ в точке $x=2$:

1) $f(2)=2^3-4\cdot2^2-2+5=8-16-2+5=-5;$

2) $f'(x)=\left(x^3-4x^2-x+5\right)'=3x^2-8x-1;$

3) $f'(2)=3\cdot2^2-8\cdot2-1=12-16-1=-5;$

4) $y=f(2)+f'(2)(x-2);$

$y=-5-5(x-2); y=-5x+5.$

<u>Відповідь:</u> $y=-5x+5.$

**Задача 6.**

На графіку функції $y=x^3-2x^2-x-1$знайти точки, в яких дотична утворює з додатним напрямом осі абсцисс кут $135^0$.

Розв'язок

1) Знаходимо кутовий коефіцієнт дотичної: $k=tg135^0=tg(180^0-45^0)=-tg45^0=-1.$

2)Оскільки дотична проведена до графіка функції $y=x^3-2x^2-x-1$, то $k=y'=3x^2-4x-1.$

3) $3x^2-4x-1=-1; 3x^2-4x=0; x(3x-4)=0; x=0$ і $x=\frac{4}{3}$.

<u>Відповідь:</u> $0; 1\frac{1}{3}.$

**Фізичний зміст похідної**

**Задача 7.**

Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом: $s(t)=t^2-4t+5$, де $s$ - відстань в метрах, а $t$ - час в секундах. Знайдіть її швидкість в момент часу $t=10$ с.

Розв'язок

1) $v(t)=s'(t)=\left(t^2-4t+5\right)'=2t-4$;

2). $v(10)=2\cdot10-4=16$

<u>Відповідь</u>: 16.

**Задача 8.**

Матеріальна точка рухається прямолінійно по наступному закону: $s(t)=2t^2-32t+1$, де $s$ - відстань в метрах, а $t$ - час в секундах. В який момент часу швидкість дорівнювала нулю?

Розв'язок

1) $v(t)=s'(t)=\left(2t^2-32t+1\right)'=4t-32$;

2) $v=0\Rightarrow 4t-32=0\Rightarrow t=8$.

<u>Відповідь:</u> 8.

**Задача 9.**

Матеріальна точка рухається прямолінійно по наступному закону: $s(t)=3t^2-27t+11$, де $s$ - відстань в метрах, а $t$ - час в секундах. В який момент часу тіло зупиниться?

Розв'язок

1) $v(t)=s'(t)=\left(3t^2-27t+11\right)'=6t-27$.

2) Тіло зупиниться, коли швидкість стане дорівнювати нулю: $6t-27=0$, $6t=27$, $t=4,5$.

<u>Відповідь:</u> 4,5

## Застосування похідної до дослідження функції

***Ознака сталості функції***

Якщо для всіх $x$ із проміжку I виконується рівність $f'(x)=0$, то функція $f$ є константою на цьому проміжку.

***Ознака зростання функції***

Якщо для всіх $x$ із проміжку I виконується нерівність $f'(x)>0$, то функція $f$ зростає на цьому проміжку.

***Ознака спадання функції***

Якщо для всіх х із проміжку I виконується нерівність $f'(x)<0$, то функція $f$ спадає на цьому проміжку.

***Окіл точки***

Проміжок $(a;b)$, який містить точку $x_0$, називають околом точки $x_0$.

***Точки екстремуму функції***

Точку $x_0$ називають точкою максимуму функції $f$, якщо існує окіл точки $x_0$ такий, що для всіх $x$ із цього околу виконується нерівність $f(x_0)\ge f(x)$

Точку $x_0$ називають точкою мінімуму функції $f$, якщо існує окіл точки $x_0$ такий, що для всіх х із цього околу виконується нерівність $f(x_0)\le f(x)$.

Точки максимуму і мінімуму називають точками екстремуму функції.

Ознаки точок максимуму і мінімуму

Нехай функція $f$ є диференційованою на проміжку $(a;b)$ і $x_0$ — деяка точка цього проміжку. Якщо для всіх $x\in(a,x_0]$ виконується нерівність $f'(x_0)\ge 0$, а для всіх $x\in[x_0;b)$ виконується нерівність $f'(x_0)\le 0$, то точка $x_0$ є точкою максимуму функції $f$.

Якщо для всіх $x\in(a,x_0]$ виконується нерівність $f'(x_0)\le 0$, а для всіх $x\in[x_0;b)$ виконується нерівність $f'(x_0)\ge 0$, то точка $x_0$ є точкою мінімуму функції $f$.

Якщо при переході через точку $x_0$ похідна змінює знак з плюса на мінус, то $x_0$ — точка максимуму; якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то $x_0$ — точка мінімуму.

Отже, для функції $f$ точки екстремуму можна шукати за такою схемою.

1) Знайти $f'(x)$;
2) Прирівняти знайдену похідну до нуля;
3) Дослідити знак похідної.
4) Користуючись відповідними теоремами, знайти точки екстремуму.

## Знаходження точок екстремуму функції

**Задача10.**

Знайти зростання та спадання функції і точки екстремуму функції $y=2x^3-x^2-8x+4$.

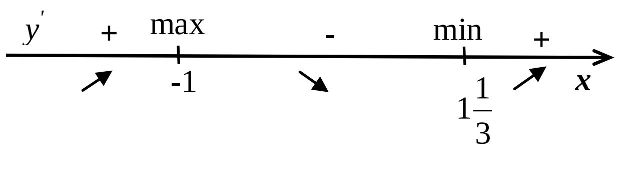
Розв'язок

1. Знаходимо похідну функції: $y'=6x^2-2x-8$

$$6x^2-2x-8=0$$

2. Знаходимо критичні точки: $\left[\begin{array}{l} x_1=1\frac{1}{3} \\ x_2=-1 \end{array}\right.$

3. Досліджуємо знак похідної:



4. Функція зростає на проміжку $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1\frac{1}{3};+\infty\right)$

Функція спадає на проміжку: $\left(-1;1\frac{1}{3}\right)$

5. $x_{\min}=1\frac{1}{3}$ $y_{\min}=y\left(1\frac{1}{3}\right)=2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3-\left(\frac{4}{3}\right)^2-8\cdot\frac{4}{3}+4=-3\frac{19}{27}$

$x_{\max}=-1$ $y_{\max}=y\left(-1\right)=2\cdot\left(-1\right)^3-\left(-1\right)^2-8\cdot\left(-1\right)+4=9$

**Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку**

Пошук найбільшого і найменшого значень диференційованої функції на проміжку $\left[a;b\right]$ можна проводити, користуючись наступною схемою.

1. Знайти точки функції $f$, у яких її похідна дорівнює нулю.
2. Обчислити значення функції в тих знайдених точках, які належать розглядуваному проміжку, і на кінцях цього проміжку.
3. З усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

**Задача 11.**

Знайти найбільше та найменше значення функції $y=2x^3-x^2-8x+4$ на відрізку $\left[-2;1\right]$.

Розв’язок

Знаходимо похідну функції: $y'=6x^2-2x-8$;

$$6x^2-2x-8=0$$

Знаходимо критичні точки: $\left[\begin{array}{l} x_1=1\frac{1}{3} \\ x_2=-1 \end{array}\right.$

Обчислюємо значення функції на кінцях відрізка і в критичних точках, які належать відрізку $\left[-2;1\right]$:

$y\left(-2\right)=2\cdot\left(-2\right)^3-\left(-2\right)^2-8\left(-2\right)+4=-16-4+16+4=0;$

$y\left(1\right)=2\cdot1^3-1^2-8\cdot1+4=-3;$

$y\left(-1\right)=2\cdot\left(-1\right)^3-\left(-1\right)^2-8\cdot\left(-1\right)+4=9$

З отриманих значень обираємо найбільше та найменше:

$\min\limits_{[-2;1]} y\left(x\right)=y\left(1\right)=-3;$

$\max\limits_{[-2;1]} y\left(x\right)=y\left(-1\right)=9.$

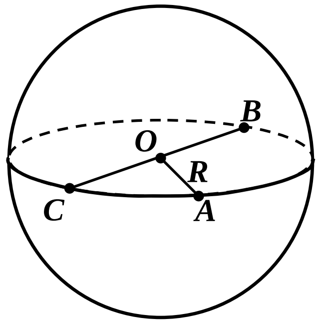
Відповідь: $\min\limits_{[-2;1]} y\left(x\right)=y\left(1\right)=-3;$ $\max\limits_{[-2;1]} y\left(x\right)=y\left(-1\right)=9.$

Розв’язати тематичний тест «Похідна функції».

## Геометрія

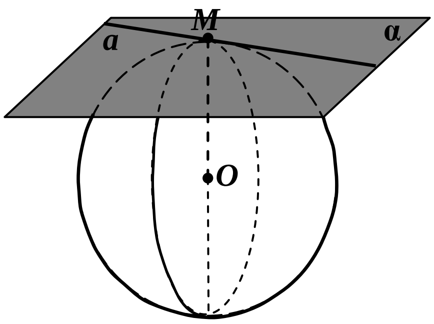
Опрацювати тему **18. Куля** . Вивчити формули . Розв'язати задачі та тести.

Кулею називають тіло, утворене внаслідок обертання півкруга навколо прямої, що містить його діаметр. Пряму, яка містить діаметр кулі, вважають віссю кулі. Поверхню кулі називають сферою.




Діаметральна площина – площина, яка проходить через центр кулі. Переріз кулі діаметральною площиною – великий круг, а переріз сфери 0 велике коло. Будь-який переріз кулі площиною є кругом. Центр цього круга – основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.

Дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку.




Дотична площина перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного в точку дотику, і навпаки: якщо площина проходить через точку кулі (сфери) і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до кулі (сфери).

***Площа поверхні і об'єм***

Площа сфери : $S = 4\pi R^2$

Об'єм кулі : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

Об'єм кульового сегмента $V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$, H- висота кульового сегмента

Об'єм кульового сектору $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$

**ЛОГІКА**

**Задача 1.**

Аркуш паперу був зігнутий навпіл, потім-ще раз навпіл, потім - ще раз, а потім - ще раз. Скільки вийде листків, якщо розрізати папір по згинах?

Відповідь:

16 листків

**Задача 2.**

У закритій коробці лежать різнокольорові желейні цукерки. Там були 2 жовті цукерки, 3 червоні і 4 зелені.

Скільки потрібно навмання витягти цукерок, щоб серед них:

a) Була хоча б 1 зелена цукерка;

b) Були хоча б 2 цукерки одного кольору;

c) Були 2 цукерки різного кольору?

Відповідь:

a) 6 цукерок

b) 4 цукерки

c) 5 цукерок