

АЛГЕБРА

Арифметична та геометрична прогресії

Арифметична прогресія

Послідовність (a_n) , у якої заданий перший член a_1 , а кожний наступний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену складеному з одним і тим же числом d , називається *арифметичною прогресією*. Число d називається різницею арифметичної прогресії. Якщо число $d > 0$, то прогресія називається зростаючою, якщо $d < 0$ то спадною.

Для того, щоб послідовність a_n була *арифметичною прогресією*, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $n > 1$ виконувалася рівність

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Якщо відомий перший член a_1 та різниця d арифметичної прогресії, то n -й (загальний) член арифметичної прогресії обчислюється за формулою $a_n = a_1 + d(n-1)$. Ця формула називається формулою загального члена арифметичної прогресії.

Сума перших n членів арифметичної прогресії a_n обчислюється за формулою,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{або} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Задача 1. Знайти суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , у якій

$$a_1 = -4, d = 2$$

Розв'язок

Застосуємо формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$$S_{10} = \frac{2 \cdot (-4) + 2 \cdot (10-1)}{2} \cdot 10 = 50$$

Відповідь: $S_{10} = 50$.

Задача 2.

Записати для арифметичної прогресії (a_n) : $-38; -34; -30 \dots$ формулу n -го члена.

Розв'язок

Оскільки $a_1 = -38$, $a_2 = -34$, то $d = a_2 - a_1 = -34 - (-38) = 4$. Формула n -го члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1) = -38 + 4(n-1) = 4n - 42$.

Відповідь: $a_n = 4n - 42$.

Задача 3.

Знайти різницю і п'ятий член арифметичної прогресії (a_n) : $9, 8, 11, 12, 2, 13, 4 \dots$

Розв'язок

$$d = a_2 - a_1 = 11 - 9, 8 = 1, 2$$

$$a_4 = 13, 4; \quad a_5 = a_4 + d = 13, 4 + 1, 2 = 14, 6$$

Відповідь: $d = 1, 2; \quad a_5 = 14, 6$.

Задача 4.

Бігун за першу хвилину бігу пробіг 400 м, а в кожную наступну хвилину пробігав на 5 м менше, ніж в попередню. Який шлях пробіг він за 1 год?

Розв'язок

За першу хвилину бігун пробіг 400 м, за другу – 395 м, за третю – 390 м і т.д.. Числа 400, 395, 390, ... утворюють спадну арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 400, d = -5$. Шлях за 1

годину, тобто 60 хвилин, дорівнює сумі перших 60 членів прогресії. Застосуємо формулу

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_{60} = \frac{2 \cdot 400 + (-5) \cdot (60-1)}{2} \cdot 60 = 15150.$$

Таким чином, за 1 годину бігун пробіг 15 км 150 м.

Відповідь: 15 км 150 м.

Задача 5.

При діленні 13-го члена арифметичної прогресії на її 3-й член в частному виходить 3, а при діленні 18-го члена на 7-й член в частному виходить 2 і в залишку 8. Знайти 20-й член прогресії.

Розв'язок

З умови витикає, що $a_{13} = 3a_3$, $a_{18} = 2a_7 + 8$

За формулою n -го члена маємо

$$a_3 = a_1 + 2d, \quad a_{13} = a_1 + 12d, \quad a_7 = a_1 + 6d, \quad a_{18} = a_1 + 17d$$

Запишемо систему двох рівнянь з двома змінними:

$$\begin{cases} a_1 + 12d = 3(a_1 + 2d) \\ a_1 + 17d = 2(a_1 + 6d) + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 12d = 3a_1 + 6d \\ a_1 + 17d = 2a_1 + 12d + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6d = 2a_1 \\ 5d = a_1 + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3d \\ a_1 = 5d - 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 3d \\ a_1 = 5d - 8 \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

$$0 = -2d + 8$$

$$d = 4$$

$$a_1 = 12$$

Знаходимо a_{20} , за допомогою формули n -го члена

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_{20} = 12 + 19 \cdot 4 = 88$$

Відповідь: $a_{20} = 88$

Геометрична прогресія

Послідовність (b_n) , у якій заданий перший член b_1 , а кожний наступний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому помноженому на одне і те ж число q , називається *геометричною прогресією*. Число q називається знаменником геометричної прогресії.

Для того, щоб послідовність b_n була геометричною прогресією, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $n > 1$ виконувалася рівність

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Якщо відомий перший член b_1 та знаменник q геометричної прогресії, то n -й (загальний) член геометричної прогресії обчислюється за формулою $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Ця формула називається формулою загального члена геометричної прогресії. Сума перших n членів геометричної прогресії b_n обчислюється за формулою

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $S = \frac{b_1}{(1-q)}$

Задача 6.

Знайти знаменник та четвертий член геометричної прогресії (b_n) : 4; -6; 9; ...

Розв'язок

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{2} = -13,5$$

Відповідь: $q = -\frac{3}{2}$; $b_4 = -13,5$

Задача 7.

Знайти суму перших семи членів геометричної прогресії (b_n) : 2; -6; 18; ...

Розв'язок

За умовою: $b_1 = 2$; $b_2 = -6$; $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -3$

Тоді за формулою $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ маємо: $S_7 = \frac{2(1-(-3)^7)}{1-(-3)} = \frac{2(2188)}{4} = 1094$

Відповідь: $S_7 = 1094$.

Задача 8.

Знайти суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_2 = 8$, $b_4 = 32$

Розв'язок

Оскільки $b_4 = b_1 \cdot q^3 = (b_1 q) q^2 = b_2 q^2$, то $q^2 = \frac{b_4}{b_2} = \frac{32}{8} = 4$. Отже, $q = 2$ або $q = -2$.

Тоді існують дві прогресії, що задовольняють умову задачі:

Якщо $q = 2$, то $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{2} = 4$ і $S_6 = \frac{4(1-2^6)}{1-2} = \frac{4(-63)}{-1} = 252$.

Якщо $q = -2$, то $b_1 = \frac{b_2}{q} = -\frac{8}{2} = -4$ і $S_6 = \frac{-4(1-(-2)^6)}{1-(-2)} = \frac{-4(-63)}{3} = 84$

Відповідь: 252 або 84.

Тематичні тести з ЗНО за попередні роки

2018

Третій член арифметичної прогресії вдвічі більший за її перший член. Визначте різницю цієї прогресії, якщо сума перших п'яти її членів дорівнює 190.

А	Б	В	Г	Д
9,5	10	9	8,5	10,5

2015

Плавець під час першого тренування подолав дистанцію у 450 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату – 1000 м за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 м. скільки всього кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?

А	Б	В	Г	Д
26	26,7	36,7	37	26,5

2016

Задано арифметичну прогресію (a_n) , у якій різниця $d = 0,5$, п'ятнадцятий член $a_{15} = 12$.

Визначте перший член прогресії a_1 .

А	Б	В	Г	Д
24	12,5	6	5	4,5

2010

Робітники отримали замовлення викопати криницю. За перший викопаний у глибину метр криниці їм платять 50 грн, а за кожний наступний – на 20 грн більше, ніж за попередній.

Скільки грошей сплатять робітникам за викопану криницю завглибшки 12 м?

А	Б	В	Г	Д
1920	2000	1900	1870	1970

2013

В арифметичній прогресії (a_n) задано $a_1 = 4, a_2 = -1$. Укажіть формулу для знаходження n -го члена цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
$a_n = -1 + 5n$	$a_n = 7 - 3n$	$a_n = 5 - n$	$a_n = 1 + 3n$	$a_n = 9 - 5n$

2011

Визначити знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_9 = 24, b_6 = -\frac{1}{9}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	3	6	-6

2014

Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайти різницю цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
8	4	-2	-4	-8

ГЕОМЕТРИЯ

Продовжуємо опрацювати тему **17. КОНУС**. Повторюємо формули. Розв'язуємо задачі та тести.

ЛОГІКА

Задача 1.

У Саші годинник відстає на 10 хвилин, але він думає, що вони відстають на 4 хвилини. Чи прийде Саша на тренування завчасно, своєчасно або запізниться? На скільки хвилин?

Відповідь: Саша запізниться на 6 хвилин.

Задача 2.

Один колекціонер - бібліофіл купив один раз у свого колеги за двадцять п'ять тисяч франків досить рідкісний екземпляр книги. Однак після покупки колекціонер спалив книгу. Навіщо він це зробив?

Відповідь: Тим самим він збільшив вартість своєї власної колекції, оскільки в ній залишився єдиний екземпляр цієї книги.