АЛГЕБРА

ЛОГАРИФМИ. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ.

Логарифми

Логарифмом додатного числа $b, (b > 0)$ *за основою* a $(a > 0, a \neq 1)$ *називається показник степеня, до якого треба піднести* a, *щоб одержати* b. $\log_a b$

Приклади:

$\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$

$\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, оскільки $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Десятковий логарифм: $\log_{10} b = \lg b$

Натуральний логарифм: $\log_e b = \ln b$, $e \approx 2,71\ldots$

Основна логарифмічна тотожність

$a^{\log_a b} = b, (b > 0, a > 0, a \neq 1)$.

Властивості і формули логарифмування

$$(a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0)$$

1. Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю: $\log_a 1 = 0$;
2. $\log_a a = 1$;
3. Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників:
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
4. Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника:
$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;
5. Логарифм степеня додатного числа дорівнює добуткові степеня на логарифм основи цього степеня:
$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
6. $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \cdot \log_a x$

Узагальнені формули логарифмування

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a |x| + \log_a |y|$, де $x \cdot y > 0$;
2. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|$, де $\frac{x}{y} > 0$
3. $\log_a x^{2k} = 2k \cdot \log_a |x|$, де $x \neq 0, k \in Z$

Формула переходу від однієї основи логарифма до іншої

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1)$$

Наслідки: $(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$

1. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;
2. $\log_a b = \log_{a^k} b^k$

3. $\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

Задача1.

Обчислити $\log_2 16$

Розв’язок

$\log_2 16 = x$

$2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

Отже, $\log_2 16 = 4$

Задача 2.

Обчислити $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{32}$

Розв’язок

$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{32} = x$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{32}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

$x = 5$

Отже, $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{32} = 5$.

Задача 3.

Обчислити $3^{\log_3 7}$.

Розв’язок

Використовуючи основну логарифмічну тотожність $a^{\log_a b} = b$ маємо: $3^{\log_3 7} = 7$

Задача 4.

Обчислити $9^{\log_3 5}$.

Розв’язок

$9^{\log_3 5} = 3^{2\log_3 5} = 3^{\log_3 5^2} = 3^{\log_3 25} = 25$

Задача 5 .

Обчислити $\log_{14} 49 + \log_{14} 4$

Розв’язок

Застосуємо властивість $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$

$\log_{14} 49 + \log_{14} 4 = \log_{14}(49 \cdot 4) = \log_{14} 196 = 2$.

Задача 6.

Обчислити $\log_5 100 - \log_5 4$

Розв’язок

Застосуємо властивість $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \left(\dfrac{100}{4}\right) = \log_5 25 = 2$

Логарифмічна функція

Логарифмічною функцією називається функція виду: $y = \log_a x$, при цьому основа логарифма $a > 0, a \neq 1, x > 0, y \in (-\infty; +\infty)$.

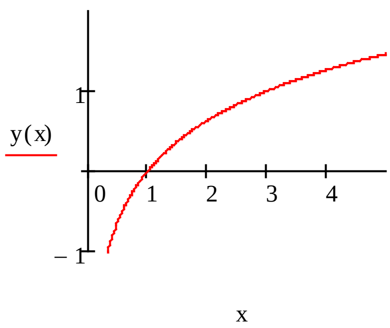
Властивості логарифмічної функції

1. Область визначення $D(y): x \in (0; +\infty)$
2. Область значень $E(y): y \in (-\infty; +\infty)$
3. Ні парна ні непарна
4. Точок перетину з Oy немає.

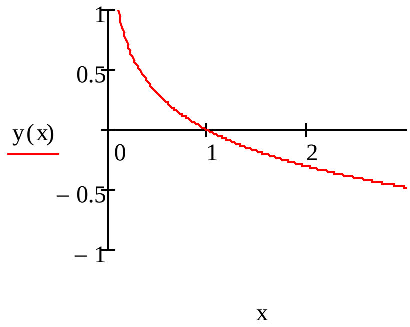
   Вісь Ox перетинає в точці $(1;0)$.
5. Якщо $0 < a < 1, x > 1$ тоді $y = \log_a x < 0$

   Якщо $0 < a < 1, 0 < x < 1$ тоді $y = \log_a x > 0$
6. Функція при $a > 1$ зростає, при $0 < a < 1$ спадає.
7. Графік функції

$y = \log_a x, x > 1$



$y = \log_a x, 0 < x < 1$



Побудова графіка логарифмічної функції

1. Скласти таблицю значень для функції $y = \log_a x$;
2. Відмітити на координатній площині отримані точки;
3. Послідовно з'єднати кривою відмічені точки;

Приклад

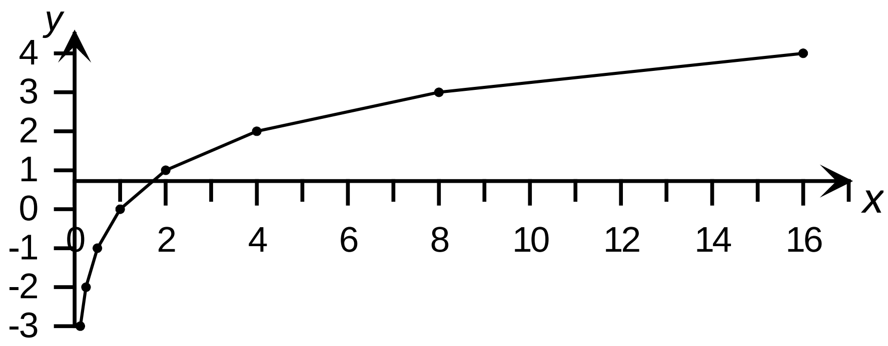
Побудувати графік функції $y = \log_2 x$

Розв'язок

Складаємо таблицю значень для функції $y = \log_2 x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Відмічаємо на координатній площині отримані точки і послідовно з'єднуємо їх



За допомогою властивостей логарифмічної функції можна скласти таблицю, якою зручно користуватися при розв'язку деяких задач.

$y=\log_a x$			
	$x\in(0;1)$	$x\in(1;+\infty)$	$x\in(0;+\infty)$ Тобто $x_2>x_1$
$a>1$	$y<0$	$y>0$	$y_2>y_1$, функція зростає
$0<a<1$	$y>0$	$y<0$	$y_2<y_1$ функція спадає

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача1 . Порівняти числа

$\log_\pi \frac{3}{5}$ і $\log_\pi \frac{5}{3}$

Розв'язок

$\pi>1, \frac{3}{5}<\frac{5}{3}$. Отже , $\log_\pi \frac{3}{5}<\log_\pi \frac{5}{3}$

Задача 2 . Порівняти числа

$\log_{0,1}\pi$ і $\log_{0,1}e^2$

Розв'язок

$0<0,1<1; \pi<e^2$. Отже , $\log_{0,1}\pi>\log_{0,1}e^2$

Задача 3. Порівняти нулем: $\log_{0,2}e$

Розв'язок

$0<0,2<1; e>1$. Отже, $\log_{0,2}e<0$.

Задача 4 . Порівняти нулем: $\log_5 \frac{1}{\pi}$

Розв'язок

$5>1; \frac{1}{\pi}<1$. Отже, $\log_5 \frac{1}{\pi}<0$

Задача 5. Порівняти нулем: $\log_2 7$

Розв'язок

$2>1; 7>1$. Отже, $\log_2 7>0$

Задача. Визначити функція $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$ зростає чи спадає?

Розв'язок

$\sqrt{2} \approx 1,4,$ тоді $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow$ функція $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$ спадає .

Задача 6. Визначити функція $y = \log_{\pi} x$ зростає чи спадає?

Розв'язок

$\pi \approx 3,14,$ тоді $\pi > 1 \Rightarrow$ функція $y = \log_{\pi} x$ зростає .

Задача 7. Зробити висновок відносно a, якщо $\log_a 5 > \log_a \frac{1}{2}$

Розв'язок

$5 > \frac{1}{2},$ тоді $a > 1.$

Задача 8. Зробити висновок відносно a, якщо $\log_a 17 > \log_a 0,17$

Розв'язок

$17 > 0,17$ тоді $0 < a < 1.$

Задача 9. Знайти область визначення функції $y = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 1)$

Розв'язок

$2x - 1 > 0$

$2x > 1$

$x > \frac{1}{2}$

Відповідь: $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty \right)$

Задача 10. Знайти область визначення функції $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + x - 2 \right)$

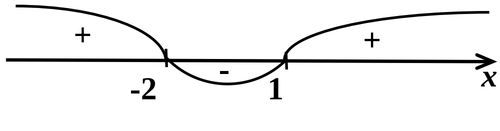
Розв'язок

$x^2 + x - 2 > 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

За теоремою Вієта: $\left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{array} \right.$

Нанесемо значення на числову вісь:



Відповідь: $x \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$

Задача 11. Знайти область визначення функції $y = \log_{\pi} \dfrac{x+8}{7-2x}$

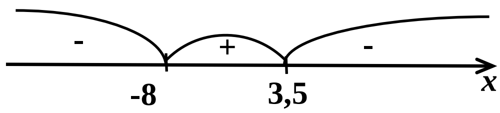
Розв'язок

$\dfrac{x+8}{7-2x} > 0$

$\dfrac{x+8}{7-2x} = 0$

$\begin{cases} x+8=0 \\ 7-2x \neq 0 \end{cases}$

$x=-8$; $x \neq 3,5$



Відповідь: $x \in (-8;3;5)$

ТЕМАТИЧНІ ТЕСТИ

1. Порівняйте a і b, якщо $\log_{0,7} a > \log_{0,7} b$

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$a > b$	$a \geq b$	$a < b$	$a = b$	$a \leq b$

2. Відомо, що $\log_3 2 = a, \log_3 5 = b$. Тоді $\log_3 200 =$

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$3a-2b$	$2a+3b$	$3a+2b$	$3a \cdot 2b$	$\dfrac{3a}{2b}$

3. Чому дорівнює значення виразу $\log_6 108 - \log_6 3$

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
-1	2	-3	4	6

4. Через яку з даних точок проходить графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

А	Б	В	Г	Д
$(2;1)$	$(2;-1)$	$\left(2;\frac{1}{2}\right)$	$(2;0)$	$\left(\frac{1}{2};2\right)$

5. Обчисліть $\log_9 \log_2 8$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	2	3	-3	1

6. Обчисліть $4^{\log_2 9}$

А	Б	В	Г	Д
81	9	4	3	2

7. Обчисліть $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{75}$	75	11	25	27

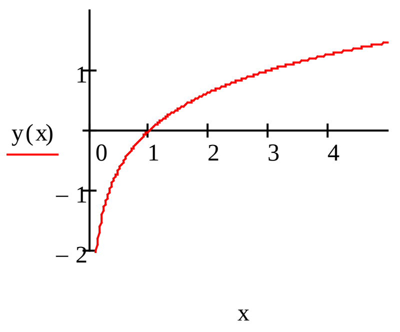
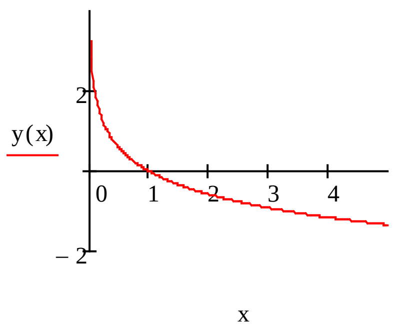
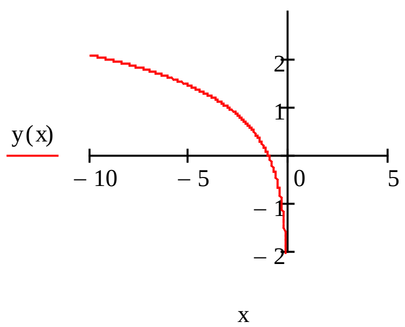
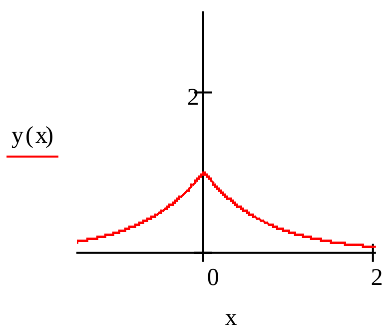
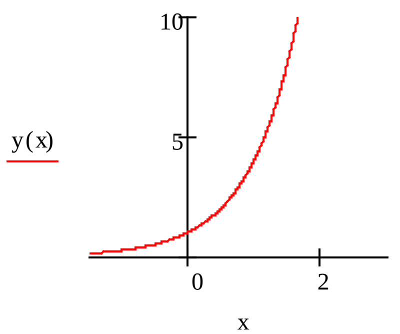
8. Обчисліть значення виразу $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$

А	Б	В	Г	Д
100	16	75	4	15

9. Якому проміжку належить $\log_5 4$

А	Б	В	Г	Д
$(0;1)$	$(1;2)$	$(2;3)$	$(3;4)$	$(4;5)$

10. На одному з рисунків зображено графік функції $y = \log_3 x$. Укажіть цей рисунок.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

ГЕОМЕТРІЯ

ГЕОМЕТРІЯ

Опрацювати тему **16. Циліндр** . Вивчити формули . Розв’язати задачі та тести.

ЛОГІКА

Задача 1.

Про який дні йде мова, якщо це - не день після неділі і не напередодні середи? Крім того, завтра не субота, та й вчора не була субота; післязавтра буде не п'ятниця, а позавчора не був вівторок.

Задача 2.

Сьогодні вівторок. Якою буде день після дня, який буде перед тим днем, який буде перед завтрашнім днем?