АЛГЕБРА

Показникові нерівності

Нерівність, яка містить змінну в показнику степеня, називають показниковою. Розв'язування показникових нерівностей, як правило, ґрунтується на властивостях показникової функції, а саме:

- Функція $y = a^x$ при $a > 1$ зростає
- Функція $y = a^x$ при $0 < a < 1$ спадає.
- Функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень

В основі розв'язування багатьох показникових нерівностей лежить наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$)рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$); якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$)рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$).

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$)рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$); якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$)рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$).

Найпростіші показникові нерівності

Задача1. Розв'яжіть нерівність $4^x < 16$

Розв'язок

$4^x < 4^2$**.** Оскільки $4 > 1$, то функція $y = 4^x$є зростаючою. Отже, при $x < 2$виконується нерівність $4^x < 16$

Відповідь : $x \in (-\infty; 2)$

Задача 2. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \sqrt{27}$

Розв'язок

Запишемо дану нерівність у вигляді $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < (3)^{\frac{3}{2}}$**;**

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$**.** Оскільки $\frac{1}{3} < 1$, то функція $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ - спадна . Отже, $2x > -\frac{3}{2}$

$x > -\frac{3}{4}$**.**

Відповідь : $x \in \left(-\frac{3}{4}; \infty\right)$

Задача 3. Розв'яжіть нерівність

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x-4}$$

Розв'язок

Так як $0 < \frac{1}{3} < 1$, тому

$x^2 - 8x < -3x - 4$

$x^2 - 5x + 4 < 0$

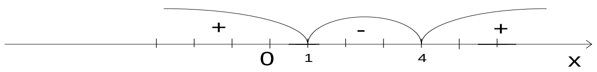
За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$$

Розв’язуємо методом інтервалів:

$$(x-1)(x-4) < 0$$



<u>Відповідь :</u> $x \in (1;4)$

Показникові нерівності, які не є найпростішими

Розв’язок показникових нерівностей зведенням до однієї основи ($a^x > b, a^{f(x)} > b$ **)**

1. Визначити ОДЗ;
2. Записати праву частину нерівності в вигляді степеня з основою a;
3. Використовуючи властивості проказникової функції, перейти від нерівності $a^x > a^b$ до нерівності $x > b$ (якщо $a > 1$) або $x < b$ (якщо $0 < a < 1$).
4. Записати відповідь, враховуючи ОДЗ .

Задача 4. Розв’язати нерівність: $2^{\frac{2x-5}{x+5}} \geq 16$

Розв’язок

1. ОДЗ: $x + 5 \neq 0$; $x \neq -5$
2. $2^{\frac{2x-5}{x+5}} \geq 2^4$
3. $2 > 1 \Rightarrow$ функція зростаюча $\Rightarrow \dfrac{2x-5}{x+5} \geq 4$

$$\frac{2x-5}{x+5} - 4 \geq 0$$

Зводимо до спільного знаменника:

$$\frac{2x-5-4(x+5)}{x+5} \geq 0$$

$$\frac{2x-5-4x-20}{x+5} \geq 0$$

$$\frac{-2x-25}{x+5} \geq 0 \,\Big|\cdot(-1)$$

$$\frac{2x+25}{x+5} \leq 0$$

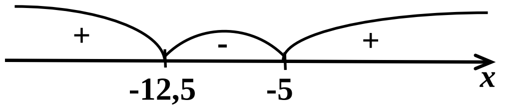
Розв’яжемо методом інтервалів:

$$2x + 25 = 0 \qquad x + 5 \neq 0$$

$$2x = -25 \qquad x \neq -5$$

$$x = -12{,}5$$

Нанесемо на числову вісь:



$x \in [-12,5;-5)$

4. <u>Відповідь:</u> $x \in [-12,5;-5)$

Розв'язок показникових рівнянь, які зводяться до квадратних, за допомогою заміни

1. За допомогою властивостей степеня, звести нерівність до виду $ma^{2x} + na^{x} + k > 0$
2. Зробити змінну $a^{x} = t$, де $t > 0$;
3. Розв'язати нерівність $mt^{2} + nt + k > 0$;
4. Виконати обернену замінну змінної та розв'язати нерівність відносно x.
5. Записати відповідь.

Задача 5. Розв'язати нерівність: $3^{2x+1} + 26 \cdot 3^{x} - 9 > 0$

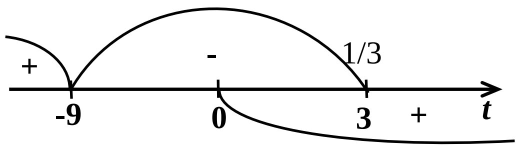
Розв'язок

1. $3^{2x} \cdot 3 + 26 \cdot 3^{x} - 9 > 0$
2. Нехай $3^{x} = t, t > 0$, тоді $3t^{2} + 26t - 9 > 0$

$D = 26^{2} - 4 \cdot 3 \cdot (-9) = 676 + 108 = 784$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-26 + \sqrt{784}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-26 + 28}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{3} \\ t_2 = \dfrac{-26 - \sqrt{784}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-26 - 28}{2 \cdot 3} = -9 \end{array}\right.$$

3. Наносимо на числову вісь



4. $t > \dfrac{1}{3}$; $3^{x} > \dfrac{1}{3}; 3^{x} > 3^{-1}$; $x > -1$
5. <u>Відповідь:</u> $x \in (-1; +\infty)$

Розв'язок показникових нерівностей виду $ma^{2x} + na^{x}b^{x} + kb^{2x} > 0$

1. Перетворити дане рівняння, виділив вирази a^{x}, b^{x};
2. Поділити всі доданки рівняння на b^{2x} (або на a^{2x}).
3. Зробити заміну $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x} = t > 0; \left(\left(\dfrac{b}{a}\right)^{x} = t > 0\right)$
4. Розв'язати одержане квадратну нерівність відносно $t, t > 0$;
5. Виконати обернену замінну змінної та розв'язати отриману нерівність відносно x.
6. Записати відповідь, враховуючи ОДЗ .

Задача 6. Розв'язати нерівність: $9 \cdot 4^{x} - 13 \cdot 6^{x} + 4 \cdot 9^{x} \geq 0$

Розв'язок

1. $9 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^{x} \cdot 3^{x} + 4 \cdot 3^{2x} \geq 0$

2. $3^{2x} > 0$, тоді при діленні на 3^{2x} отримаємо: $9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 4 \geq 0$

3. Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t, t > 0$

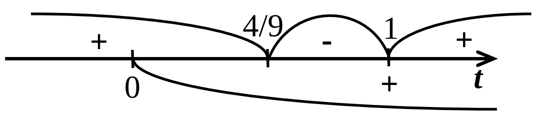
4. Одержали квадратну нерівність: $9t^2 - 13t + 4 \geq 0$

Спочатку розв'яжемо квадратне рівняння: $9t^2 - 13t + 4 = 0$

$D = (-13)^2 - 4\cdot 9\cdot 4 = 169 - 144 = 25$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{13+\sqrt{25}}{2\cdot 9} = \frac{13+5}{18} = 1 \\ t_2 = \frac{13-\sqrt{25}}{2\cdot 9} = \frac{13-5}{18} = \frac{4}{9} \end{array}\right.$$

Знайдені значенні нанесемо на числову вісь:



5.

$0 < t \leq \frac{4}{9}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \leq \frac{4}{9}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

$x \geq 2$

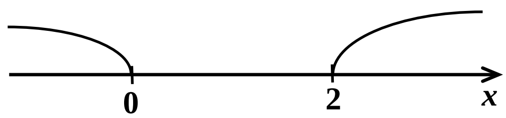
або

$t \geq 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

$x \leq 0$



6. Відповідь: $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

Розв'язування показникових нерівностей виду $a\cdot n^{f(x)} + b\cdot n^{g(x)} > c$. Винесення спільного множника за дужки.

1. Використовуючи властивості степеня, зводимо нерівність до однієї основи з однаковими показниками степеня;
2. Виносимо спільний множник за дужки. Спрощуємо та розв'язуємо одержану нерівність;
3. Записуємо відповідь.

Задача 7. Розв'язати нерівність: $5^{x+1} + 2\cdot 5^{x+2} \geq 11$

Розв'язок

1. $5^{x}\cdot 5 + 2\cdot 5^{x}\cdot 5^{2} \geq 11$

2.
$5^x \cdot \left(5+2\cdot 5^2\right) \geq 11$

$5^x\left(5+50\right) \geq 11$

$5^x \cdot 55 \geq 11$

$5^x \geq \frac{11}{55}$

$5^x \geq \frac{1}{5}$

$5^x \geq 5^{-1}$

$x \geq -1$

4. Відповідь: $x \in \left[-1;+\infty\right)$.

ТЕМАТИЧНІ ТЕСТИ

1. Розв'язати нерівність $2^x > \frac{1}{2}$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-1)$	$(-1;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$(1;+\infty)$	$(-\infty;1)$

2. Розв'язати нерівність $10^{3x+2} > 100$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-1)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;+\infty)$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;1)$

3. Розв'язати нерівність $(0,3)^x > 0,009$

А	Б	В	Г	Д
$x<-2$	$x>2$	$x<2$	$x>-2$	$x<0$

4. Розв'язати нерівність $5^{1-2x} > \frac{1}{125}$

А	Б	В	Г	Д
$x<-2$	$x<2$	$x>2$	$x>-2$	$x<0$

5. Розв'язати нерівність $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2-x} < \left(\frac{5}{6}\right)^6$

А	Б	В	Г	Д
$x<-2$	$x<-2; x>3$	$x>3$	$x<2; x>3$	$x<2; x>-3$

6. Розв'язати нерівність $0,5^{2x} < 1$

А	Б	В	Г	Д

$(-\infty;-1)$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;-1)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;+\infty)$

7. Розв'язати нерівність $\frac{1}{7^{3x}} < 49$

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$	$\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$	$\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3};0\right)$	$\left(-\frac{2}{3};1\right)$

8.Розв'язати нерівність $2^{x^2-6x-2,5} < 16\sqrt{2}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

А	Б	В	Г	Д
-1	0	1	2	3

9. Розв'язати нерівність $2^{2x-3} - 3\cdot 2^{x-2} + 1 \le 0$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

А	Б	В	Г	Д
1	0	2	-1	-2

10. Розв'язати нерівність $16^{\frac{x+10}{x-10}} < 0,125$.

А	Б	В	Г	Д
$(0;10)$	$\left(-\frac{10}{7};10\right)$	$\left(-\frac{10}{7};0\right)$	$\left(-\frac{10}{7};9\right)$	$(-1;10)$

11. Розв'язати нерівність $4^x - 2^x - 2 \ge 0$

А	Б	В	Г	Д
$(-1;1]$	$(-\infty;1]$	$(-\infty;-1)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;+\infty)$

12. Розв'язати нерівність $2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x + 3\cdot 4^x \ge 0$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$	$(-\infty;0]$	$[1;+\infty)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;+\infty)$

13. Розв'язати нерівність $9^{x+1} - 2\cdot 3^x - 7 \le 0$

А	Б	В	Г	Д
$(-1;1]$	$(-\infty;0]$	$[1;+\infty)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;+\infty)$

14. Розв'язати нерівність $7^{x+2} - 14\cdot 7^x > 5$

А	Б	В	Г	Д

$(-1;+\infty)$	$(-\infty;0]$	$[1;+\infty)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;+\infty)$

ГЕОМЕТРІЯ

Тема : «ПІРАМІДА»

ЗНО 2010

Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює 30°. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус кола вписаного в її основу, дорівнює 3см. (Відповідь: 144)

ЗНО 2012

Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема – 5 см. Визначити косинус кута між площиною бічної грані піраміди і площиною основи. (Відповідь: 0,6)

ЗНО 2014

Розгортка піраміди складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, і чотирьох правильних трикутників. Визначити площу бічної поверхні цієї піраміди.

(Відповідь: $100\sqrt{3}$)

ЗНО 2015

Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а сторона її основи – 12 см. Знайти довжину бічного ребра піраміди. (Відповідь: 9 см)

ЗНО 2017

Периметр основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 72 см. Визначте довжину висоти піраміди, якщо її апофема дорівнює 15. (Відповідь: 12)

ЗНО 2019

Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, усі її бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди. (Відповідь: 72 см)